



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DISCIPLINA: CÁLCULO B

UNIDADE III - LISTA DE EXERCÍCIOS - 2008.1

Integração Dupla

[1] Esboce a região de integração e inverta a ordem nas seguintes integrais:

$$(1.1) \int_0^4 \int_0^{y/2} f(x, y) \, dx dy \quad (1.2) \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) \, dy dx \quad (1.3) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) \, dy dx$$

[2] Esboce a região de integração, inverta a ordem e calcule as seguintes integrais:

$$(2.1) \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} \frac{\sin(\pi x)}{1-x} \, dx dy \quad (2.2) \int_0^1 \int_y^1 y e^{x^3} \, dx dy \quad (2.3) \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1} \, dx dy$$

[3] Calcule $\int \int_R f(x, y) \, dA$, onde:

$$\begin{array}{ll} (3.1) f(x, y) = x e^{xy}; & R \text{ é a região } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\} \\ (3.2) f(x, y) = x \cos(xy); & R \text{ é a região } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi/2\} \\ (3.3) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}; & R \text{ é a região } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\} \end{array}$$

[4] Calcule as seguintes integrais, sabendo que R é a região delimitada pelas curvas dadas:

$$\begin{array}{ll} (4.1) \int \int_R (8-x-y) \, dx dy, & R : \{y = x^2 \text{ e } y = 4.\} \\ (4.2) \int \int_R (x+y) \, dx dy, & R : \{y = x^2 + 1, y = -x^2 - 1, x = -1 \text{ e } x = 1.\} \\ (4.3) \int \int_R \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \, dx dy, & R : \{y = x, y = 2x, x = 1 \text{ e } x = 2.\} \end{array}$$

[5] Transforme as seguintes integrais para coordenadas polares e calcule-las:

$$\begin{array}{ll} (5.1) \int \int_R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \, dx dy, & R : \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \\ (5.2) \int \int_R xy \, dx dy, & R : \{x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \\ (5.3) \int \int_R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \, dx dy, & R : \{(x-a)^2 + y^2 \leq a^2.\} \\ (5.4) \int \int_R (1-x^2-y^2) \, dx dy, & R : \{x \geq 0, y \geq 0, x = 0, y = x, x^2 + y^2 = 1.\} \end{array}$$

[6] Calcule, usando **integral dupla**, a área da região R delimitada pelas curvas abaixo.

Esboce os gráficos:

$$(6.1) \ y = x^3, \ y = -x + 2 \text{ e } y = 0 \quad (6.2) \ y = e^{x-1}, \ y = x \text{ e } x = 0$$

$$(6.3) \ x = y^2 + 1 \text{ e } x = -y + 3 \quad (6.4) \ x = y^2, \ y = x + 3, \ y = -2 \text{ e } y = 3$$

[7] Determine, usando **integral dupla**, a área da região no primeiro quadrante delimitada pela curva polar $r = 2 + \cos \theta$ e as curvas cartesianas $y = x$ e $y = 0$.

[8] Determine, usando **integral dupla**, o centróide da região no primeiro quadrante delimitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 2$, assumindo que a densidade por unidade área da região é constante.

[9] Calcule, usando **integral dupla**, o volume:

$$(9.1) \text{ do tetraedro limitado no } 1^\circ \text{ octante pelo plano } \frac{z}{3} + \frac{x}{2} + y = 1.$$

$$(9.2) \text{ do sólido limitado pela superfície } f(x, y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}, \text{ os planos}$$

$x = 3$ e $y = 2$ e os três planos coordenadas.

$$(9.3) \text{ do sólido do } 1^\circ \text{ octante delimitado pelos planos coordenadas, pelo parabolóide } z = x^2 + y^2 - 1 \text{ e pelo plano } 2x + y = 2.$$

Campos Vetoriais

[10] Descreva geometricamente os seguintes campos de vetores definidos em \mathbb{R}^2 :

$$(10.1) \ \vec{F}(x, y) = x^2 \vec{j} \quad (10.2) \ \vec{F}(x, y) = \vec{i} + \vec{j} \quad (10.3) \ \vec{F}(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$$

[11] Calcule a divergência dos seguintes campos vetoriais:

$$(11.1) \ \vec{F}(x, y) = (xy^2, e^{x^2+y^2})$$

$$(11.2) \ \vec{F}(x, y) = (\cos(x+y), \sin(\pi xy))$$

$$(11.3) \ \vec{F}(x, y, z) = (y, x, z)$$

$$(11.4) \ \vec{F}(x, y, z) = (xy, xz, z^2)$$

$$(11.5) \ \vec{F}(x, y, z) = (e^{x^2yz}, e^{xy^2z}, e^{xyz^2})$$

$$(11.6) \ \vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(y), z \sin(x), x^2yz)$$

[12] Calcule o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

$$(12.1) \quad \vec{F}(x, y, z) = (3z^2, 3x^2, 3y^2)$$

$$(12.2) \quad \vec{F}(x, y, z) = (\sin(x), z \cos(y), 3z)$$

$$(12.3) \quad \vec{F}(x, y, z) = (\cos(2xy), 3x + 2z + y, yz^2)$$

$$(12.4) \quad \vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

[13] Verifique se os seguintes campos vetoriais são conservativos e, em caso afirmativo, calcule o potencial:

$$(13.1) \quad \vec{F}(x, y) = (2x \sin y + 4e^x, \cos x)$$

$$(13.2) \quad \vec{F}(x, y) = (e^y, xe^y + y)$$

$$(13.3) \quad \vec{F}(x, y) = (3x^2 + 2y^2, 4xy + 6y^2)$$

$$(13.4) \quad \vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

$$(13.5) \quad \vec{F}(x, y, z) = (yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy} + \cos z)$$

[14] Se o potencial entre dois cilindros concêntricos é $V(x, y) = 110 + 30 \ln(x^2 + y^2)$, em volts, qual é a direção da força elétrica no ponto $P = (2, 5)$? Mostre que $\nabla^2 V = 0$.

Integrais Curvilíneas

[15] Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

$$(15.1) \quad \int_C (y/x) \, ds, \quad C : x = t^4, \, y = t^3, \, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$(15.2) \quad \int_C (2 \cos x + 3y + \ln z) \, ds, \quad C : x = t, \, y = 2t, \, z = t, \, e \leq t \leq e^2$$

$$(15.3) \quad \int_C (xy^4) \, ds, \quad C \text{ é a metade direita do círculo } x^2 + y^2 = 16$$

$$(15.4) \quad \int_C (x^2 z) \, ds, \quad C \text{ é o segmento de reta de } (0, 6, -1) \text{ a } (4, 1, 5)$$

$$(15.5) \quad \int_C xy \, dx + (x - y) \, dy, \quad C \text{ consiste nos segmentos de reta de } (0, 0) \text{ a } (2, 0)$$

e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$

$$(15.6) \quad \int_C y(x^2 + y^2) \, dx - x(x^2 + y^2) \, dy + xy \, dz, \quad C : x = \cos t, \, y = \sin t, \, z = t, \, -\pi \leq t \leq \pi$$

$$(15.7) \quad \int_C x^2 \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz, \quad C \text{ consiste nos segmentos de reta de } (0, 0, 0) \text{ a } (1, 2, -1)$$

e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$

[16] Mostre que a integral $\int_C (2x \sin y) \, dx + (x^2 \cos y - 3y^2) \, dy$, onde C é qualquer caminho de $(-1, 0)$ a $(3, 2)$, não depende do caminho escolhido. Calcule esta integral.

[17] Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ em cada um dos seguintes casos:

$$(17.1) \quad \vec{F}(x, y) = x^2 \vec{i} + (x - y) \vec{j}, \quad \gamma(t) = (t, \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$(17.2) \quad \vec{F}(x, y) = x^2 \vec{j}, \quad \gamma(t) = (t^2, 3), \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$(17.3) \quad \vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}, \quad \gamma(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(17.4) \quad \vec{F}(x, y, z) = (x + y + z) \vec{k}, \quad \gamma(t) = (t, t, 1 - t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

[18] Calcule a integral de linha do vetor $\vec{F} = 3x^2y^2z^4 \vec{i} + 2x^3yz^4 \vec{j} + 4x^3y^2z^3 \vec{k}$ ao longo do segmento de reta que liga o ponto $(1, 2, 3)$ ao ponto $(0, 0, 1)$.

[19] Calcule a integral de linha do vetor $\vec{F} = \frac{\sqrt{x}}{2} \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}$ no percurso definido por $x = 2y = z^2$, do ponto $(0, 0, 0)$ até o ponto $(1, 1/2, 1)$.

[20] Calcule a integral de linha do vetor $\vec{F} = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$ ao longo da trajetória fechada determinada pelo círculo de raio 2 centrado na origem e contido no plano cuja normal é o vetor $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

[21] Calcule a integral de linha do vetor $\vec{F} = -z \vec{i} + 3x \vec{j} + 2y \vec{k}$, no caminho fechado definido pelas arestas do triângulo cujos vertices são $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ (percorridos nesta ordem).

Teorema de Green

[22] Utilize o Teorema de Green para calcular as seguintes integrais de linha:

(22.1) $\oint_C \frac{-x^2y}{1+x^2} dx + \arctg x dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$.

(22.2) $\oint_C x dx + xy dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ ($x, y \geq 0$), $x = 0$.

(22.3) $\oint_C -y^3 dx + x^3 dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = x^3$ e $y = x$.

(22.4) $\oint_C (x^2 - y) dx + x dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

(22.5) $\oint_C (-y^2 + \arctg x) dx + \ln x dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $x = y^2$.

[23] Se R for uma região plana qualquer á qual se aplica o Teorema de Green, mostre que a área A de R é dada pela formula

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\partial R} -y \, dx + x \, dy \quad (*)$$

Use a fórmula (*) para calcular a área das regiões limitadas pelas curvas dadas:

(23.1) $y = 3x$ e $y^2 = 9x$.

(23.2) $y = 0$, $x + y = a$ ($a > 0$), $x = 0$.

(23.3) o eixo x e o arco da cicloide $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(23.4) $x = a \cos^3 \theta$ e $y = a \sin^3 \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

[24] Qual é a taxa de escoamento de um fluido com campo de velocidades

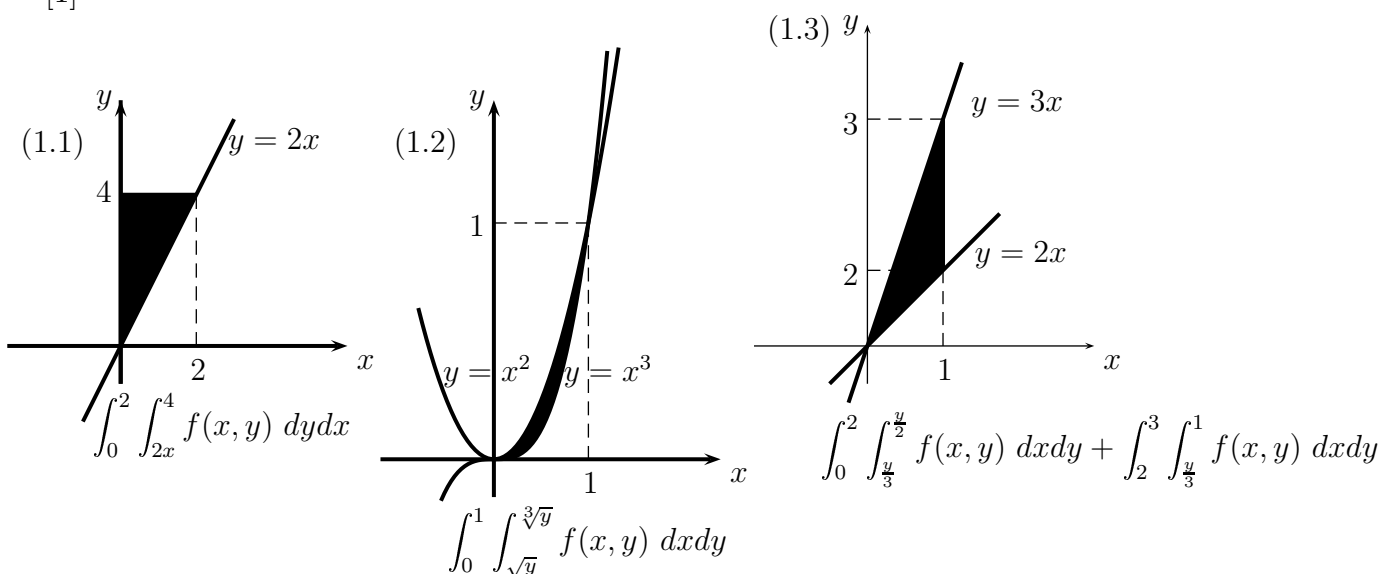
$\vec{V}(x, y) = (8x - y^2, x - 5y)$ metros/segundos para fora de uma região R de área igual a $11m^2$.

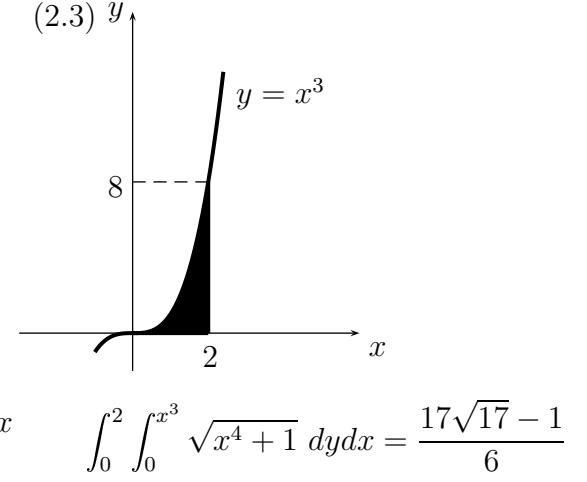
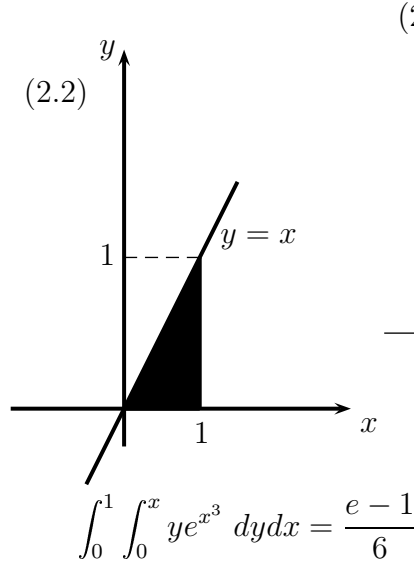
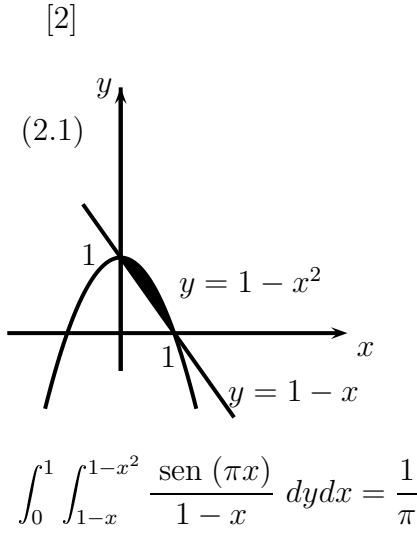
[25] Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y) = (x^2, xy)$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

[26] Considere o campo vetorial $\vec{v}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ e região R limitada pela curva $\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow (1 + \cos t, \sin t)$. Calcule a circulação de \vec{v} sobre γ .

Respostas

[1]





[3] $\left\{ \begin{array}{lll} (3.1) & e^3 - e - 2 & (3.2) \frac{4}{\pi} \end{array} \right. \quad (3.3) \frac{3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 1}{3}$

[4] $\left\{ \begin{array}{lll} (4.1) & \frac{896}{15} & (4.2) 0 \end{array} \right. \quad (4.3) \left(\operatorname{arctg}(2) - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \ln 2$

[5] $\left\{ \begin{array}{llll} (5.1) & 2\pi & (5.2) \frac{15}{4} & (5.3) 4a \end{array} \right. \quad (5.4) \frac{\pi}{16}$

[6] $\left\{ \begin{array}{llll} (6.1) & \frac{3}{4} & (6.2) \frac{e-2}{2e} & (6.3) \frac{9}{2} \end{array} \right. \quad (6.4) \frac{145}{6}$

[7] $\frac{9\pi + 16\sqrt{2} + 1}{16} \quad [8] \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{2} \right)$

[9] $\left\{ \begin{array}{lll} (9.1) & 1 & (9.2) \frac{43}{2} \end{array} \right. \quad (9.3) \frac{11}{6}$

[11] $\left\{ \begin{array}{lll} (11.1) & y^2 + 2ye^{x^2+y^2} & (11.2) - \operatorname{sen}(x+y) + \pi x \cos(x+y) \end{array} \right. \quad (11.3) 1$

$$\left\{ \begin{array}{lll} (11.4) & y + 2z & (11.5) 2xyz(e^{x^2yz} + e^{xy^2z} + e^{xyz^2}) \end{array} \right. \quad (11.6) 1 + x^2y$$

[12] $\left\{ \begin{array}{ll} (12.1) & 6y \vec{i} + 6z \vec{j} + 6x \vec{k} \end{array} \right. \quad (12.2) - \cos y \vec{i}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (12.3) & (z^2 - 2) \vec{i} + (3 - 2x \operatorname{sen}(2xy)) \vec{k} \end{array} \right. \quad (12.4) 0$$

$$[13] \left\{ \begin{array}{l} (13.1) \text{ não conservativo} \\ (13.2) \text{ conservativo; } f(x, y) = xe^y + \frac{y^2}{2} + k, \text{ } k \text{ é constante} \\ (13.3) \text{ conservativo; } f(x, y) = 4xy + 2y^3 + k, \text{ } k \text{ é constante} \\ (13.4) \text{ conservativo; } f(x, y, z) = xyz + k, \text{ } k \text{ é constante} \\ (13.5) \text{ conservativo; } f(x, y, z) = ze^{xy} + \text{sen } z + k, \text{ } k \text{ é constante} \end{array} \right.$$

$$[14] \left(\frac{120}{29}, \frac{300}{29} \right)$$

$$[15] \left\{ \begin{array}{ll} (15.1) \frac{125 - 13\sqrt{13}}{48} & (15.2) \sqrt{6} \left(2 \text{sen}(e^2) + 3e^4 - 2e^2 - 2 \text{sen } e \right) \\ (15.3) \frac{8192}{5} & (15.4) \frac{56\sqrt{57}}{3} \\ (15.5) -2 & (15.6) -2\pi \\ (15.7) \frac{35}{3} & \end{array} \right.$$

$$[16] 9 \text{sen}(2) - 8$$

$$[17] \left\{ \begin{array}{llll} (17.1) \frac{\pi^3}{3} - 2 & (17.2) 0 & (17.3) \frac{8\pi^3}{3} & (17.4) \frac{-11}{6} \end{array} \right.$$

$$[18] 864 \quad [19] \frac{7}{3} \quad [20] -12\pi \quad [21] 1$$

$$[22] \left\{ \begin{array}{lllll} (22.1) 1 & (22.2) \frac{1}{3} & (22.3) \frac{5}{42} & (22.4) 18\pi & (22.5) \frac{9}{5} \end{array} \right.$$

$$[23] \left\{ \begin{array}{llll} (23.1) \frac{1}{2} & (23.2) \frac{a^2}{2} & (23.3) 3\pi a^2 & (23.4) 8a \end{array} \right.$$

$$[24] 33 \quad [25] 0 \quad [26] 2\pi$$